# PART4 数列の大小関係と極限

## 要点整理と公式

### 要点① 数列の大小関係と極限

数列の極限について，次のことが成り立つ。

**数列の大小関係と極限①**

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq b_n$ のとき

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\alpha \leqq \beta$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

(1)について，すべての自然数 $n$ で $a_n < b_n$，つまり $a_n = b_n$ となる $n$ が存在しなかったとしても，必ずしも $\alpha < \beta$ とは限らず，$\alpha = \beta$ となることがある。

(ex) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{2}{n}$ のとき，すべての自然数 $n$ で $a_n < b_n$ であるが

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 1$　つまり，$\alpha = \beta$ である。

### 要点② はさみうちの原理

数列の極限について，次のことが成り立つ。

**数列の大小関係と極限②**

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

(ex) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}$ について

$n$=1，2，3，4，5，6……のとき $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{1}{6}$，……

ここで，　　$\leqq \cos\dfrac{n\pi}{3} \leqq$　　より　　$\leqq \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3} \leqq$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) =$　，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$　より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3} =$

【MEMO】

**4** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{6}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos^2 n\theta$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

# Point Pickup

**はさみうちの原理**

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

直接求めることが困難な極限を求める場合に有効。

また，$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，定数列(定数の数列)でもよい。

# 第 2 講　PART4 確認問題

**1**　次の極限を求めよ。ただし，ア，イ は，下の①～④のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$

〔解答〕　$-1 \leqq \cos\frac{n\pi}{4} \leqq 1$ より，

$$\boxed{ア} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4} \leqq \boxed{イ}$$

$\lim_{n\to\infty}\boxed{ア}=\boxed{ウ}$，$\lim_{n\to\infty}\boxed{イ}=\boxed{エ}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=\boxed{オ}$$

①　$n$　　②　$-n$　　③　$\frac{1}{n}$　　④　$-\frac{1}{n}$

**2**　次の極限を求めよ。ただし，カ，キ は，下の①～④のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

〔解答〕　$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ より，

$$\boxed{カ} \leqq \frac{(-1)^n}{n+1} \leqq \boxed{キ}$$

$\lim_{n\to\infty}\boxed{カ}=\boxed{ク}$，$\lim_{n\to\infty}\boxed{キ}=\boxed{ケ}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\boxed{コ}$$

①　$\frac{1}{n}$　　②　$-\frac{1}{n}$　　③　$\frac{1}{n+1}$　　④　$-\frac{1}{n+1}$

# PART4　数列の大小関係と極限

**4**　次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{6}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos^2 n\theta$　　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

**[解答]**

(1)　$-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq 1$ より $-\dfrac{1}{2n}\leqq\dfrac{1}{2n}\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq\dfrac{1}{2n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{6}=0$

(2)　$-1\leqq\cos n\theta\leqq 1$ より $0\leqq\cos^2 n\theta\leqq 1$　　よって $0\leqq\dfrac{1}{n+1}\cos^2 n\theta\leqq\dfrac{1}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos^2 n\theta=0$

(3)　$-1\leqq(-1)^n\leqq 1$ より $-\dfrac{1}{n^2}\leqq\dfrac{(-1)^n}{n^2}\leqq\dfrac{1}{n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$

# 第 2 講　PART4 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：④，イ：③，ウ：0，エ：0，オ：0

**[解説]**

$-1 \leqq \cos\frac{n\pi}{4} \leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4} \leqq \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0 \quad \text{[A]}$$

[A]　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

**2**　**[正解]** カ：④，キ：③，ク：0，ケ：0，コ：0

**[解説]**

$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{n+1} \leqq \frac{(-1)^n}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \quad \text{[B]}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$$

[B]　$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ の各辺に $\frac{1}{n+1}$ $(>0)$ をかける。